

# Zirkulationsverteilung in mehrstufigen Axialturbinen

Bammert, Karl

Veröffentlicht in:  
Abhandlungen der Braunschweigischen  
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 4, 1952, S. 73-86



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

# Zirkulationsverteilung in mehrstufigen Axialturbinen\*)

Von **Karl Bammert**

Mit 13 Abbildungen

Vorgelegt von Herrn **H. Schlichting**

*Abstract: Behind the first stage of multistage axial turbines with untwisted blades a certain flow pattern occurs which practically is repeated behind each of the following homogeneously built stages. Consequently the blade circulations of the stator rows and the rotor rows as well are approximately constant over the whole blade length except for the first stage. With regard to blade circulation there is, therefore, no need to consider the more expensive free vortex blading with constant circulation over the blade length as being of any advantage compared with the essentially simpler untwisted blading. Under untwisted blading all blade forms may be understood with a constant outlet angle over the whole blade length.*

*Übersicht: In den mehrstufigen Axialturbinen mit geraden Schaufeln stellt sich hinter der ersten Stufe eine Strömungsform ein, die dann praktisch hinter allen weiteren homogenen Stufen wiederkehrt. Dadurch verlaufen die Schaufelzirkulationen sowohl der Leit- als auch der Laufräder — ausgenommen die der ersten Stufe — annähernd über die Schaufelhöhe konstant. Vom Standpunkt der Schaufelzirkulation besteht jedenfalls keine Veranlassung, der kostspieligeren drallverwundenen Schaufel, die konstante Zirkulation über die Schaufelhöhe liefert, den Vorrang vor der meist wesentlich einfacheren geraden Schaufel zu geben. Unter geraden Schaufeln werden alle Schaufeln verstanden, die einen über die Schaufelhöhe konstanten Austrittswinkel haben.*

## 1. Einleitung

In neuerer Zeit geht man im vielstufigen Kondensationsteil von Dampfturbinen, im Niederdruckteil von Gasturbinen und bei Wasserturbinen hoher Schnellaufzahlen bereits auf Schaufelhöhen, die größer sind als die entsprechenden Nabenhalmesser. Das heißt, wenn die Halbmesser  $r_n$  und  $r_a$  die Ringkanalbegrenzung durch Nabe und Gehäuse darstellen (Abb. 1), daß bereits Nabenvverhältnisse  $r_n/r_a$  kleiner als 0,5 gewählt werden. Im Hinblick auf die Nabenablösung sind solche Drallströmungen bereits gefährdet<sup>1)</sup>. Um daher die Strömung in derartigen Extremfällen über die radiale Erstreckung übersehen zu können, verwindet man die Schaufeln nach dem Drallsatz  $c_u \cdot r = \text{const}$ , wobei  $c_u$  die Umfangskomponente der Absolutgeschwindigkeit und  $r$  der zwischen  $r_n$  und  $r_a$  veränderliche Kanalhalbmesser sind. Man erhält damit eine wirbelfreie Drallströmung, deren wesentliche Merkmale darin bestehen, daß die Zirkulation  $\Gamma$  über die Schaufelhöhe konstant ist

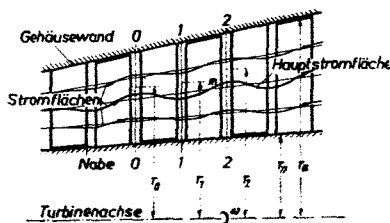


Abb. 1. Mehrstufige Axialturbinen im Längsschnitt mit Meridianstromlinienverlauf.

\*) Vorgetragen am 6. Dez. 1951 im Mechanik-Kolloquium der Technischen Hochschule in Braunschweig.

und diese Form rotationsfreier Strömung exakt berechnet werden kann. Der Nachteil dieser Beschaukelung besteht darin, daß die Schaufeln infolge der starken ein- und austrittsseitigen räumlichen Verwindung verhältnismäßig hohe Fertigungskosten verursachen.

Die vorliegende Arbeit zeigt nun, daß die wesentlich einfacheren geraden Schaufeln in der mehrstufigen Axialturbine zwar keine absolut aber doch angenähert konstante Schaufelzirkulation über die Schaufelhöhe liefern. Die Strömung ist nicht mehr rotationsfrei; das ist aber unbedeutend. Als *gerade Schaufeln* mögen nun alle jene Arten verstanden sein, die einen über die Schaufelhöhe *konstanten Austrittswinkel* haben. Das Profil kann dabei über die Schaufelhöhe einen gleichbleibenden Querschnitt haben — im Sprachgebrauch auch zylindrische Schaufel genannt — es kann, wenn möglich, aus gewalzten Profilstäben zugeschnitten sein, es kann schließlich auch über die Schaufelhöhe konisch verlaufen und gar noch eintrittsseitig verwunden sein (lange Laufschaufeln). Im letzteren Falle beschränkt sich der gerade Verlauf auf jene Mantellinien, die den konstanten Austrittswinkel über die Schaufelhöhe herbeiführen.

## 2. Zirkulation im Axialrad

Greifen wir aus einer mehrstufigen Axialturbine eine Stufe heraus (Abb. 1), dann befindet sich die Ebene 0 vor dem Leitrad, Ebene 1 zwischen Leit- und Laufrad und Ebene 2 hinter dem Laufrad. Die entsprechenden Geschwindigkeitsdreiecke zeigt Abb. 2. Hierbei sind  $c$  die Absolut-,  $u$  die Umfangs- und  $w$  die Relativgeschwindigkeiten.  $c_u$  und  $c_z$  sind die Komponenten der Absolutgeschwindigkeit in Umfangs- und Achsrichtung.

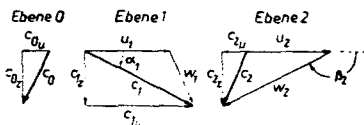


Abb. 2. Geschwindigkeitsdreiecke einer Axialstufe.

Als Zirkulation in einer bewegten Flüssigkeit wird das über eine geschlossene Kurve gebildete Integral

$$\Gamma = \oint (w \, d\vec{s}) \quad (1)$$

definiert, das heißt die Summe der skalaren Produkte aus den Bahnelementen und den an diesen vorhandenen Geschwindigkeitsvektoren.

Das Linienintegral längs des Kreisumfanges beim Halbmesser  $r$  ergibt die Zirkulation

$$\begin{aligned} \text{Ebene 0} \quad \Gamma_0 &= c_{0u} \cdot 2\pi r_0 \\ \text{Ebene 1} \quad \Gamma_1 &= c_{1u} \cdot 2\pi r_1 \\ \text{Ebene 2} \quad \Gamma_2 &= c_{2u} \cdot 2\pi r_2 \end{aligned} \quad (2)$$

oder vom mitbewegten Laufrad aus gesehen (vgl. Abb. 2)

$$\begin{aligned} \text{Ebene 1} \quad \Gamma'_1 &= (c_{1u} - u_1) \cdot 2\pi r_1 \\ \text{Ebene 2} \quad \Gamma'_2 &= (c_{2u} - u_2) \cdot 2\pi r_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Betrachtet man  $r_0$ ,  $r_1$  und  $r_2$  jeweils in ihren Ebenen als veränderliche Halbmesser von Naben- bis Außenbegrenzung, dann liefern die Gleichungen (2) und (3) die Zirkulationsverteilung in den einzelnen Ebenen über die Schaufel-

höhe. Der Unterschied der Zirkulation vor und hinter einem Rad entspricht der Summe der Zirkulationen um die einzelnen Schaufeln<sup>2)</sup>. Die Schaufelzirkulation rechnet man zweckmäßig längs der Stromflächen, wie sie das rotationssymmetrische Schaufelgitter durchziehen. Im allgemeinen Fall verlaufen die Meridianstromlinien nicht geradlinig; in vielen Fällen schlängeln sie sich um den geradlinigen Verlauf (Abb. 1). Die Halbmesser der Stromlinien in der Ein- und Austrittsebene eines Rades sind dann nicht linear zu geordnet. Bezieht sich der Zeiger  $e$  auf die Eintrittsebene eines Rades, dann stellt  $r_e$  den zu  $r$  in der Austrittsebene zugeordnete Halbmesser dar. Nach Abb. 3 ist  $r_{0e}$  der zugeordnete Halbmesser zu  $r_1$  einer Stromlinie vom Leitrad und  $r_{1e}$  der zugeordnete Halbmesser zu  $r_2$  einer anderen Stromlinie vom Laufrad.

Mit den über die Schaufelhöhe veränderlichen aber fest zugeordneten Halbmessern  $r_e$  und  $r$  erhält man für die gesamte Schaufelzirkulation eines Leitrades

$$\Sigma \Gamma_s = n \Gamma_s = \Gamma_1 - \Gamma_{0e} = 2\pi(c_{1u} \cdot r_1 - c_{0u_e} \cdot r_{0e}) \quad (4)$$

und eines Laufrades

$$\Sigma \Gamma'_s = n' \Gamma'_s = \Gamma'_2 - \Gamma'_{1e} = 2\pi[(c_{2u} - u_2)r_2 - (c_{1u_e} - u_{1e})r_{1e}]. \quad (5)$$

Hierbei sind  $\Gamma_s$  bzw.  $\Gamma'_s$  die Zirkulation einer Schaufel und  $n$  bzw.  $n'$  die Zahl der am Umfang eines Rades angeordneten Schaufeln.

Führt man die Abkürzungen

$$\frac{c_u}{u_m} = \Omega \quad \frac{c_z}{u_m} = \Phi \quad \frac{r}{r_m} = \frac{r\omega}{r_m\omega} = \frac{u}{u_m} = \nu \quad (6)$$

ein, wobei  $\nu$  das Halbmesserverhältnis,  $\Omega$  und  $\Phi$  die dimensionslosen Umfangs- und Axialkomponenten der Absolutgeschwindigkeit,  $r_m = \frac{1}{2}(r_n + r_a)$  der mittlere Halbmesser in der jeweiligen Ebene des Strömungskanal,  $u_m = r_m \cdot \omega$  die mittlere Umfangsgeschwindigkeit vor und hinter dem Laufrad beim Halbmesser  $r_m$

und  $\omega$  die Drehgeschwindigkeit bedeuten, dann erhält man die Geschwindigkeitsdreiecke nach Abb. 4 und die Gleichungen (4) und (5) lauten in dimensionsloser Form für das Leitrad

$$\frac{n \Gamma_s}{r_m^2 \omega} = 2\pi(\Omega_1 \nu_1 - \Omega_{0e} \nu_{0e})$$

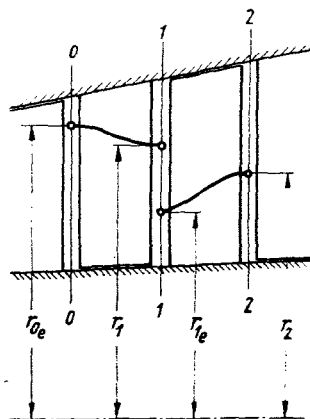


Abb. 3. Zugeordnete Halbmesser in Leit- und Laufrad.

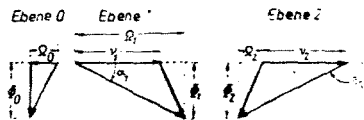


Abb. 4. Dimensionslose Geschwindigkeitskomponenten einer Axialstufe

und für das Laufrad

$$\frac{n' \Gamma'_s}{r_m^2 \omega} = 2\pi [(\Omega_2 - v_2) v_2 - (\Omega_{1e} - v_{1e}) v_{1e}] .$$

Bezieht man die Schaufelzirkulation an beliebiger Stelle der Schaufelhöhe auf die Zirkulation, wie sie sich längs der Hauptstromfläche ergibt (vgl. kräftig ausgezogene Meridianstromlinie  $m$  von Abb. 1), dann erhält man den Verlauf der Schaufelzirkulation über die Schaufelhöhe in Vohnundertteilen. Die Schaufelzirkulation auf der Hauptstromfläche beträgt 100 v.H.

Für eine *Leitschaufel* ist

$$\frac{\Gamma_s}{\Gamma_{sm}} [\%] = \frac{\Omega_1 v_1 - \Omega_{0e} v_{0e}}{(\Omega_1 v_1 - \Omega_{0e} v_{0e})_m} \cdot 100 \quad (7)$$

und für eine *Laufschaufel*

$$\frac{\Gamma'_s}{\Gamma'_{sm}} [\%] = \frac{(\Omega_2 - v_2) v_2 - (\Omega_{1e} - v_{1e}) v_{1e}}{[(\Omega_2 - v_2) v_2 - (\Omega_{1e} - v_{1e}) v_{1e}]_m} \cdot 100 . \quad (8)$$

### 3. Zirkulationsverteilung bei drallverwundenen Schaufeln

Gehorcht die Strömung dem Drallsatz  $c_u \cdot r = \text{const}$  bzw.  $\Omega \cdot v = \text{Const}$ , dann ist bekanntlich das Integral längs des Kreisumfanges

$$\Gamma = c_u \cdot 2\pi r = \frac{\text{const}}{r} \cdot 2\pi r = \text{Konst.} \quad (9)$$

also unabhängig vom Halbmesser  $r$ . Das heißt, daß nach den Gleichungen (2) und (3) in jeder Ebene die Zirkulation über die Schaufelhöhe konstant verläuft. Damit ist auch die Schaufelzirkulation  $\Gamma_s$  bzw.  $\Gamma'_s$  nach den Gleichungen (7) und (8) über die Schaufelhöhe konstant. Das gilt uneingeschränkt für inkompressible und kompressible Flüssigkeiten. Bei zylindrischen oder kegeligen Begrenzungswänden des Schaufelkanales mit Profilen verschwindender Dicke verlaufen die Stromlinien von inkompressiblen Flüssigkeiten und kompressiblen Medien niedriger Machscher Zahlen längs coaxialen Zylindern oder Kegeln. Die Meridianstromlinien sind im Längsschnitt Gerade. Für wirkliche Profile treten aber bereits Abweichungen auf, die mit sinkender Teilung anwachsen. Bei kompressiblen Strömungen mit Machschen Zahlen über 0,5 treten merkliche radiale Ablenkungskräfte auf, so daß der geradlinige Verlauf keinesfalls mehr zutrifft. Je nach dem Winkelverlauf und der Machschen Zahl kann die Querströmung nach innen oder außen wirken.

Will man den geradlinigen Verlauf bei kompressiblen Strömungen hoher Machscher Zahlen dennoch erreichen, dann korrigiert man den Schaufelwinkel der drallverwundenen Schaufeln so, daß von der Beschauelung her radiale Ablenkungskräfte erzeugt werden, die die Querkkräfte aufheben und den geradlinigen Meridianstromlinienverlauf wieder gewährleisten<sup>3)</sup>. Dann haben wir in den einzelnen Ebenen keine Potentialströmung und daher auch keine konstante Zirkulation über die Schaufelhöhe mehr. Ändert sich die Zirkulation in den einzelnen Ebenen etwa gleichsinnig, dann ist es möglich, daß die Schaufelzirkulation über die Schaufelhöhe etwa konstant verläuft. Das muß von Fall zu Fall untersucht werden, insbesondere wenn sich die Machschen Zahlen innerhalb der Kanalströmung stark ändern. Bei dem vorgegebenen

geradlinigen Meridianstromlinienverlauf ist noch bemerkenswert, daß eine so korrigierte drallverwundene Schaufel bei einer Machschen Zahl von 1,0 zu einer Schaufel mit praktisch konstantem Austrittswinkel über die Schaufelhöhe führt.

Im folgenden wenden wir unser Interesse dem im Axialturbinenbau praktisch wichtigen Fall einer kompressiblen Strömung mit Schaufeln konstanter Austrittswinkel zu, ohne einen bestimmten Meridianstromlinienverlauf vorzuschreiben und damit ohne einer bestimmten Machschen Zahl den Vorrang zu geben.

#### 4. Zirkulationsverteilung bei geraden Schaufeln

Die Zirkulationen  $\Gamma$  und  $\Gamma'$ , können dann berechnet werden, wenn die Verteilung der  $c_u$ -Komponenten über die Schaufelhöhe bekannt ist. Für die einstufige Axialturbine hat E. Eckert die Gleichung der  $c_u$ -Verteilung für die Ebene I abgeleitet<sup>4)</sup>. Sie lautet

$$c_{1u} \cdot r_1^{\cos^2 \alpha_1} = \text{const} \quad \text{bzw.} \quad \Omega_1 \cdot r_1^{\cos^2 \alpha_1} = C_1 \quad (10)$$

und gilt nur hinter dem Leitrad der ersten Stufe. Die Verteilung der  $c_u$ -Komponenten über die Schaufelhöhe in den einzelnen Ebenen einer beliebigen Stufe einer mehrstufigen Axialturbine mit geraden Schaufeln ist noch nicht bekannt. Diese Ableitungen seien im folgenden zuerst durchgeführt, um dann anschließend die Zirkulationsverteilung berechnen zu können. Dabei sei angenommen, daß die Schaufeln im Gitter dicht beieinander stehen und die Totwassergebiete hinter den Schaufelstegen vernachlässigt werden können, so daß man rotationssymmetrische Strömung voraussetzen darf; außerdem sei, wie schon oben, Reibungsfreiheit der strömenden Flüssigkeit, Dämpfe oder Gase vorausgesetzt, wie das allgemein in der Turbinentheorie gehandhabt wird.

##### a) Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung über die Schaufelhöhe

Nach Abb. 5 ist der in den Ringraum eingebaute Schaufelkranz nach innen begrenzt durch die Nabe mit dem Halbmesser  $r_n$  und nach außen durch die Gehäusewand mit dem Halbmesser  $r_a$ . In das so gebildete Axialrad denken wir uns ein Zylinderkoordinatensystem derart hineingelegt, daß  $z$  in die Drehachse fällt,  $r$  die Entfernung von der Drehachse und  $\varphi$  den Winkel in Umfangsrichtung angibt. Das eingezeichnete Teilchen möge im Abstand  $r$  mit der Absolutgeschwindigkeit  $c$  strömen, wovon  $c_z$  deren Axialkomponente und  $c_u$  deren Umfangskomponente seien. Die Radialkomponente  $c_r$  sei so klein angenommen, daß sie vernachlässigt werden kann.

Der Druckanstieg eines Flüssigkeitsteilchens berechnet sich nach der Eulerschen Grundgleichung zu

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{c_u^2}{r}; \quad (11)$$

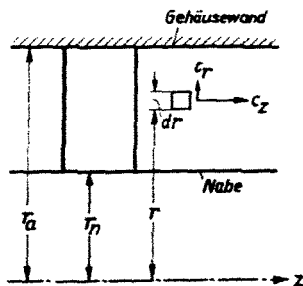


Abb. 5. Flüssigkeitsteilchen hinter einem Axialrad.

hierbei sind  $\varrho$  die Dichte und  $p$  der statische Druck. Die Gl. (11) wird in totaler Schreibweise angegeben, weil für den rotationssymmetrischen Fall  $\partial p / \partial \varphi = 0$  ist und die Rechnung auf Probleme, bei denen  $\partial p / \partial z \approx 0$  ist, beschränkt werden soll.

Setzt man nun für

$$\frac{1}{\varrho} dp = dP, \quad (12)$$

dann erhält man für (11)

$$\frac{dP}{dr} = \frac{c_u^2}{r}. \quad (13)$$

Dabei stellt  $P$  die statische Druckenergie pro Masseneinheit [ $m^2/s^2$ ] dar. Sie ist wesentlich mit der Enthalpie  $i$  identisch.

Der Energiesatz für kompressible Flüssigkeit lautet:

$$\underbrace{\int \frac{dp}{\varrho}}_P + \frac{c_u^2}{2} + \frac{c_z^2}{2} = P_g; \quad (14)$$

hierbei ist  $P_g$  die Gesamtdruckenergie.

Differenziert man Gl. (14) nach  $r$  und setzt für  $dP/dr$  den Ausdruck von Gl. (13) ein, dann erhält man

$$\frac{dP_g}{dr} = \frac{c_u^2}{r} + c_u \frac{dc_u}{dr} + c_z \frac{dc_z}{dr}. \quad (15)$$

Nach Abb. 2 berechnet sich hinter einem *Leitrad* (Ebene 1) die Umfangskomponente der Absolutgeschwindigkeit  $c_1$

$$c_{1u} = c_{1z} \cdot \operatorname{ctg} \alpha_1. \quad (16)$$

Dabei ist  $\alpha_1$  der feste über die Schaufelhöhe konstante Austrittswinkel des Leitrades. Hinter einem *Laufgrad* (Ebene 2) berechnet sich die Umfangskomponente der Absolutgeschwindigkeit  $c_2$

$$c_{2u} = r_2 \omega + c_{2z} \operatorname{ctg} \beta_2, \quad (17)$$

wobei wieder  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit und  $\beta_2$  der feste Austrittswinkel des Laufgrades sind.  $\alpha_1$  und  $\beta_2$  sind im Drehsinn gleich (vgl. Abb. 2). Deshalb genügt die Ableitung für die Laufgradströmung (Ebene 2); in diesen abgeleiteten Gleichungen brauchen jeweils für  $\beta_2$  der Winkel  $\alpha_1$  und  $r_2 \omega$  der Wert Null für das feststehende oder ein negativer Wert für ein gegenläufiges Leitrad gesetzt zu werden, um die Gleichungen für das Leitrad (Ebene 1) zu erhalten.

Gleichung (17) differenziert ergibt

$$\frac{dc_{2u}}{dr_2} = \omega + \frac{dc_{2z}}{dr_2} \operatorname{ctg} \beta_2. \quad (18)$$

Setzt man die Gleichungen (17) und (18) in die Gleichung (15) ein, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{dP_{g_2}}{dr_2} = & 2r_2 \omega^2 + 3\omega c_{2z} \operatorname{ctg} \beta_2 + c_{2z} \frac{dc_{2z}}{dr_2} (1 + \operatorname{ctg}^2 \beta_2) + \frac{1}{r_2} c_{2z}^2 \operatorname{ctg}^2 \beta_2 + \\ & + r_2 \omega \frac{dc_{2z}}{dr_2} \operatorname{ctg} \beta_2. \end{aligned} \quad (19)$$

Auf einer Stromlinie gilt vor und hinter einem Laufrad<sup>5)</sup>

$$P_{g_2} - r_2 \omega c_{2u} = P_{g_{1e}} - r_{1e} \omega c_{1u_e} \quad (20)$$

Dabei ist  $r c_u$  der Drehimpuls und  $r \omega c_u$  stellt eine Energie je Masseneinheit dar. Der Zeiger  $e$  bezieht sich wieder auf die Eintrittsebene, die beim Laufrad nach Abb. 3 in Ebene 1 liegt; Ebene 2 ist die Ausgangsebene. In der Schreibweise

$$P_{g_{1e}} - P_{g_2} = \omega (r_{1e} c_{1u_e} - r_2 c_{2u})$$

sagt die Gleichung aus, daß beim Durchströmen einer Flüssigkeit durch ein Laufrad die Änderung der Gesamtenergie der Energieabgabe im Laufrad entspricht. Hierbei sind  $r_{1e}$  und  $r_2$  wieder veränderliche aber zugeordnete Halbmesser; die Stromlinie kann innerhalb des Laufrades einen beliebigen Verlauf nehmen.

In der differentiellen Schreibweise erhält man mit den Gleichungen (17) und (18)

$$\omega \frac{d}{dr_2} (r_2 c_{2u}) = 2 r_2 \omega^2 + c_{2z} \omega \operatorname{ctg} \beta_2 + r_2 \omega \frac{dc_{2z}}{dr_2} \operatorname{ctg} \beta_2 \quad (21)$$

Subtrahiert man Gl. (21) von Gl. (19), dann erhält man:

$$\frac{dP_{g_2}}{dr_2} - \omega \frac{d}{dr_2} (r_2 c_{2u}) = 2 \omega c_{2z} \operatorname{ctg} \beta_2 + c_{2z} \frac{dc_{2z}}{dr_2} \frac{1}{\sin^2 \beta_2} + \frac{1}{r_2} c_{2z}^2 \operatorname{ctg}^2 \beta_2 \quad (22)$$

Die Integration dieser nichtlinearen Differentialgleichung ist nun so auszuführen, daß man eine für die Auswertung geeignete Form erhält. Ein Lösungsansatz besteht darin, daß man die rechte Seite dieser Differentialgleichung durch Nullsetzen der linken Seite löst. Man erhält dadurch eine inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung. Durch „Variation der Konstanten“ wird dann die Nullsetzung der linken Seite korrigiert. Die Lösung lautet für das *Laufrad* (Ebene 2):

$$c_{2z} = C_2 r_2^{-\cos^2 \beta_2} - r_2 \omega \frac{\sin 2 \beta_2}{1 + \cos^2 \beta_2} + r_2^{-\cos^2 \beta_2} \int \frac{\sin^2 \beta_2 r_2^{\cos^2 \beta_2}}{c_{2z}} \left[ \frac{dP_{g_2}}{dr_2} - \omega \frac{d}{dr_2} (r_2 c_{2u}) \right] dr_2 \quad (23)$$

und für das feststehende *Leitrad* (Ebene 1), wenn  $\omega = 0$ ,  $\beta_2 = \alpha_1$  und  $r_2 = r_1$  gesetzt wird:

$$c_{1z} = C_1 r_1^{-\cos^2 \alpha_1} + r_1^{-\cos^2 \alpha_1} \int \frac{\sin^2 \alpha_1 r_1^{\cos^2 \alpha_1}}{c_{1z}} \frac{dP_{g_1}}{dr_1} dr_1 \quad (24)$$

Führen wir nun die Abkürzungen von Gl. (6) ein und ergänzen sie noch um die dimensionslosen Druckenergieziffern

$$\frac{P_g}{r_m^2 \omega^2} = \Pi_g \quad \text{und} \quad \frac{P}{r_m^2 \omega^2} = \Pi, \quad (25)$$

dann erhält man für das *Leitrad* (Ebene 1):

$$\Phi_1 = C_1^* r_1^{-\cos^2 \alpha_1} + r_1^{-\cos^2 \alpha_1} \int \frac{\sin^2 \alpha_1 \cdot r_1^{\cos^2 \alpha_1}}{\Phi_1} \frac{d\Pi_{g_1}}{dr_1} dr_1 \quad (26)$$



und für das Laufrad (Ebene 2):

$$\Phi_2 = C_2^* v_2^{-\cos^2 \beta_2} - v_2 \frac{\sin 2 \beta_2}{1 + \cos^2 \beta_2} + v_2^{-\cos^2 \beta_2} \int \frac{\sin^2 \beta_2 \cdot v_2^{\cos^2 \beta_2}}{\Phi_2} dv_2 (\Pi_{g_2} - v_2 \Omega_2) dv_2. \quad (27)$$

Da man die in den Gleichungen (26) und (27) enthaltene Änderung von  $\Pi_{g_1}$  über  $v_1$  bzw.  $\Pi_{g_2} - v_2 \Omega_2$  über  $v_2$  unmittelbar nicht kennt, jedoch die  $\Pi_g$  Werte von der entsprechenden Eintrittsebene, muß noch diese Beziehung eingeführt werden.

Längs einer Stromlinie im Leitrad ist:

$$P_{g_1} = P_{g_{0e}}, \quad \text{also} \quad \Pi_{g_1} = \frac{r_{m_{0e}}^2}{r_{m_1}^2} \Pi_{g_{0e}} \quad (28)$$

und längs einer Stromlinie im Laufrad ist nach Gl. (20):

$$\Pi_{g_2} - v_2 \Omega_2 = \frac{r_{m_{1e}}^2}{r_{m_2}^2} (\Pi_{g_{1e}} - v_{1e} \Omega_{1e}). \quad (29)$$

Setzt man diese Beziehungen in die Gleichungen (26) und (27) ein, dann erhält man die für die Auswertung geeigneten Gleichungen.

Für das Leitrad (Ebene 1):

$$\Phi_1 = C_1^* v_1^{-\cos^2 \alpha_1} + v_1^{-\cos^2 \alpha_1} \int \frac{\sin^2 \alpha_1 \cdot v_1^{\cos^2 \alpha_1}}{\Phi_1} \frac{r_{m_{0e}}^2}{r_{m_1}^2} \frac{d\Pi_{g_{0e}}}{dv_1} dv_1 \quad (30)$$

und für das Laufrad (Ebene 2):

$$\begin{aligned} \Phi_2 = C_2^* v_2^{-\cos^2 \beta_2} - v_2 \frac{\sin 2 \beta_2}{1 + \cos^2 \beta_2} + \\ + v_2^{-\cos^2 \beta_2} \int \frac{\sin^2 \beta_2 \cdot v_2^{\cos^2 \beta_2}}{\Phi_2} \frac{r_{m_{1e}}^2}{r_{m_2}^2} dv_2 (\Pi_{g_{1e}} - v_{1e} \Omega_{1e}) dv_2. \end{aligned} \quad (31)$$

Zur Berechnung von  $\Phi$  ist es noch notwendig, daß man die Zuordnung der Stromlinien von der Ausgangsebene zur Eintrittsebene kennt. Eine erste Näherung stellt die Annahme dar, daß die Stromlinien verhältnismäßig zugeordnet sind. Im allgemeinen ist die Zuordnung bei Beschäufelungen mit konstanten Austrittswinkeln nicht linear.

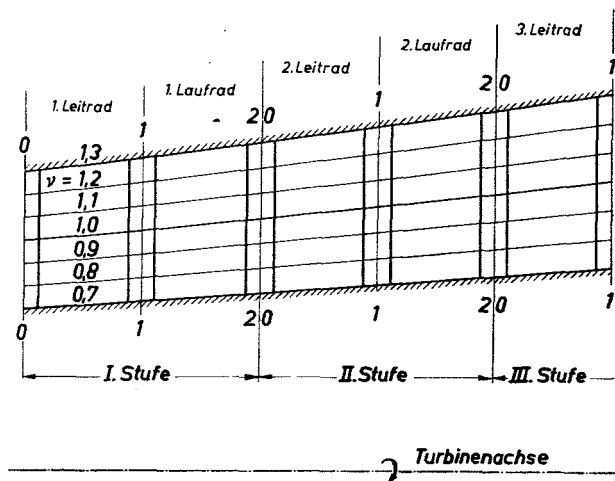
### b) Gang der Auswertung

Jede Stufe einer mehrstufigen Turbine habe die Ebenen 0, 1 und 2. Die Ebene 2 ist zugleich die Ebene 0 der nächstfolgenden Stufe. Die Stufen mögen durch römische Zahlen gekennzeichnet sein (vgl. Abb. 6).

Vor dem ersten Leitrad der ersten Stufe einer mehrstufigen Axialturbine ströme die Flüssigkeit rein axial mit einer über die Höhe des Ringraumes konstanten Geschwindigkeit  $\Phi_0$  und konstanten Gesamtdruckenergie  $\Pi_{g_0}$ . Die Umfangskomponente  $\Omega_0$  ist Null.

Um die Geschwindigkeits- und Druckverhältnisse hinter dem ersten Leitrad (Ebene 1) berechnen zu können, gehen wir von der Gl. (30) aus. In ihr kann man  $d\Pi_{g_{0e}}/dv_1 = 0$  setzen, weil voraussetzungsgemäß  $\Pi_{g_0} = \text{const}$

ist. Dadurch vereinfacht sich Gl.(30) zu  $\Phi_1 = C_1^* v_1^{-\cos^2 \alpha_1}$  und führt mit Gl.(16) zu der von E. Eckert angegebenen Gl.(10).  $C_1^*$  ist noch unbekannt. Setzt man nun den Wert für  $\Phi_1$  ein, wie er sich aus der bekannten Rechnung



**Abb. 6. Strömungskanal mit geraden Meridianstromlinien.**

des mittleren Stromfadens ( $\nu_1 = 1,0$ ) ergibt, dann erhält man einen angenäherten Wert für  $C_1^*$ . Damit kann man die Verteilung der Axialkomponente  $\Phi_1$  über die Schaufelhöhe berechnen. Aus Gl. (16) ergibt sich die Umfangskomponente zu  $\Omega_1 = \Phi_1 \operatorname{ctg} \alpha_1$ . Die Gesamtdruckenergieverteilung berechnet sich gemäß der Kanalerweiterung nach Gl. (28) und die statische Druckenergieverteilung aus  $\Pi_1 = \Pi_{g_1} - \frac{1}{2} \Phi_1^2 - \frac{1}{2} \Omega_1^2$ .

Um die Strömungsverhältnisse hinter dem 1. Laufrad, also Ebene 2 der ersten Stufe, zu berechnen, geht man von Gl. (31) aus. Die Eintrittsebene hierzu ist die Ebene 1. Da hier das Produkt  $v_{1e} \cdot \Omega_{1e}$  über die Schaufelhöhe nicht konstant ist, ist der unter dem Integral stehende Differentialquotient veränderlich. Er wird ermittelt, indem man den Ausdruck  $\Pi_{g_{1e}} - v_{1e} \Omega_{1e}$  oder, da hier noch  $\Pi_{g_{1e}}$  konstant ist,  $v_{1e} \Omega_{1e}$  über  $v_2$  aufträgt und graphisch differenziert. Das ist aber erst dann möglich, wenn man die Zuordnung von  $v_{1e}$  zu  $v_2$  kennt. In erster Näherung nimmt man sie zunächst linear an. Die Integration wird von  $v = 1,0$  numerisch in Teilschritten von 0,1 aufwärts und abwärts durchgeführt. Für  $v = 1,0$  ist das Integral gleich Null. Die Konstante rechnet sich wieder näherungsweise aus jenem  $\Phi_2$ , das für den mittleren Halbmesser, also  $v_2 = 1,0$ , aus der Stromfadenrechnung gewonnen wurde. Damit kann man die  $\Phi_2$ -Verteilung und nach Gl. (17)  $\Omega_2 = v_2 + \Phi_2 \operatorname{ctg} \beta_2$  über die Schaufelhöhe berechnen. Aus Gl. (29) läßt sich die Gesamtdruckenergie  $\Pi_{g_2}$  und mit  $\Phi_2$  und  $\Omega_2$  die statische Druckenergieverteilung  $\Pi_2$  ermitteln.

Die Ergebnisse der Ebene 2 der I. Stufe entsprechen der Ebene 0 der zweiten Stufe. Die Berechnung der Strömungsverhältnisse in den Ebenen 1 und 2 der zweiten Stufe geschieht nun in der gleichen Weise wie für die erste Stufe beschrieben. Nur die Vereinfachung mit  $\Pi_{\theta_0}$  und  $\Pi_{\theta_1} = \text{const}$  über die Schaufelhöhe entfällt hier und in allen weiteren Stufen.

### c) Durchrechnung eines konkreten Falles

Ein Zahlenbeispiel möge nun einen quantitativen Überblick vermitteln. Die Rechnung sei für die ersten beiden Stufen einer mehrstufigen Turbine durchgeführt (Abb. 6). Die Meridianstromlinien werden in erster Näherung geradlinig angenommen. Die stetige Halbmesseränderung von Ebene zu Ebene betrage 1,05. Der Abströmwinkel  $\alpha_1$  der Leitschaufeln sämtlicher Leiträder sei über die ganze radiale Erstreckung  $30^\circ$  und der Abströmwinkel  $\beta_2$  der Laufschaufeln der beiden Laufräder betrage  $150^\circ$ . Beim mittleren Halbmesser  $r = 1,0$  wird für die Räder ein Geschwindigkeitsverhältnis  $(u_1/c_1)_m$  bzw.  $(u_2/w_2)_m$  von 1/1,3 gewählt. Die Schaufelhöhe erstreckt sich über die Halbmesserverhältnisse  $v_n = 0,7$  bis  $v_a = 1,3$ ; das entspricht einem Nabenverhältnis  $v_n/v_a$  von 0,54.

Nach dem im vorigen Unterabschnitt gegebenen Schema kann nun die Geschwindigkeitsverteilung über die Schaufelhöhe in jeder Ebene berechnet werden. Die Ergebnisse sind angenähert, da sich die Rechnung auf die beiden Annahmen stützt, daß die Stromlinien in den einzelnen Ebenen linear zugeordnet sind und wir die Axialgeschwindigkeit für den mittleren Halbmesser ( $r = 1,0$ ) der eindimensionalen Stromfadenrechnung entlehnt haben.

Zu einer weiteren Näherung gelangt man, wenn man nun davon ausgeht, daß jede einzelne Ebene von der gleichen Menge durchströmt werden muß (konstanter Massenstrom). Die Kontinuitätsgleichung hierfür lautet

$$G = \int_{r_n}^{r_a} 2\pi r dr c_z \gamma,$$

wenn  $G$  der Durchsatz in der Zeiteinheit ist. Mit den Abkürzungen von Gl. (6) erhält man

$$G = 2\pi r_{m_0 I}^3 \omega \gamma_{0 I} \int_{v_n}^{v_a} \left( \frac{r_m}{r_{m_0 I}} \right)^3 \frac{\gamma}{\gamma_{0 I}} \Phi v dv. \quad (32)$$

Dabei ist  $\gamma$  die Wichte des Strömungsmittels. Die Größen mit dem Zeiger  $0_I$  beziehen sich auf die Ebene 0 der I. Stufe. Da der Wert vor dem Integralzeichen für alle Ebenen konstant ist, genügt es, um die Bedingung des konstanten Massenstromes zu erfüllen, wenn das Integral für alle Ebenen den gleichen Wert hat. Unter dem Integral stehen nur dimensionslose Größen. Dabei ist hier das Wichteverhältnis bereits vorgegeben, weil für alle Stufen  $(u_1/c_1)_m$  bzw.  $(u_2/w_2)_m$  gleich 1/1,3 und das Erweiterungsverhältnis der Kanalhalbmesser gleich 1,05 der Rechnung zu Grunde gelegt worden ist. Im allgemeinen ist es zwar so, daß die Änderung der Wichte durch den Zustand und die Eigenschaften des Dampfes oder Gases gebunden ist und man, um

beispielsweise eine bestimmte Axialgeschwindigkeit zu verwirklichen, das Erweiterungsverhältnis entsprechend wählt. Hier sollen aber nur grundsätzliche Erscheinungen der Strömung untersucht werden.

Der Zusammenhang zwischen Wichte und statischer Druckenergie ist also bei vorgegebener Sachlage folgender:

nach Definition	aus Proportionalität
$P$	$F \propto r_m^2$
$r_m^2 \omega^2 = \Pi$ ;	$c_z \quad , \quad r_m$
erweitert mit $1/r_{m0I}^2$	$V \quad , \quad r_m^3$
$\frac{P}{r_{m0I}^2 \omega^2} = \frac{r_m^2}{r_{m0I}^2} \Pi$ ,	$\gamma \quad , \quad 1/r_m^3$
wobei nach Gl. (14)	$\frac{\gamma}{\gamma_{0I}} = \frac{1}{\left(\frac{r_m}{r_{m0I}}\right)^3}$
$\Pi = \Pi_g - \frac{1}{2} \Phi^2 - \frac{1}{2} \Omega^2$	

Für  $\Phi$  und  $\Omega$  werden die bekannten Werte eingesetzt, wie sie für den mittleren Halbmesser in den einzelnen Ebenen erzielt wurden.  $\Pi_g$  wird nach den Gleichungen (28) und (29) berechnet, wobei für den Eintrittszustand in die Turbine ein Wert für  $\Pi_{g0I}$  angenommen werden muß. Abb. 7 zeigt den Verlauf der so berechneten Abhängigkeit des Wichteverhältnisses von der statischen Druckenergie, wenn man beispielsweise für  $\Pi_{g0I} = 0$  einsetzt.

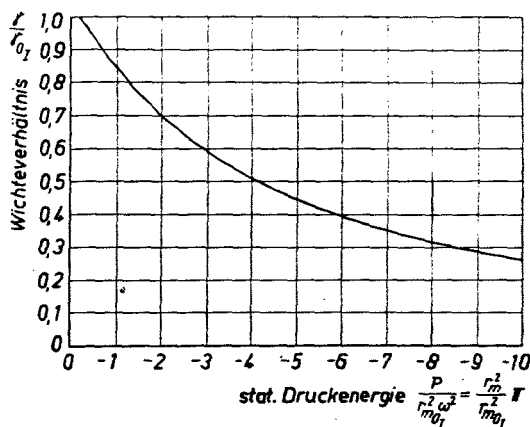


Abb. 7. Verlauf der Wichteänderung in Abhängigkeit von der statischen Druckenergie.

Nun hat man von Gl. (32) alle Größen, um das Integral auszuwerten. In Abb. 8 ist der Integrand über  $r$  aufgetragen. Die Kurve des Integranden für die Ebene  $0_I$  verläuft gradlinig, weil Druck und Geschwindigkeit über die Schaufelhöhe konstant sind. Die geschraffte Begrenzung umschließt die Fläche, die das Integral der Ebene  $0_I$  liefert. Dieser Wert muß, wenn die Kontinuität erfüllt sein soll, bei allen anderen Ebenen ebenso groß sein. Ist das nicht der Fall, dann setzt man die Werte der Integranden um den Anteil herab oder herauf, den die Fläche der betreffenden Ebene gegenüber der Fläche der Ebene 0 der ersten Stufe zu groß oder zu klein ist. Dies läuft im wesentlichen auf die Korrektur der Axialgeschwindigkeit hinaus. Erfahrungsgemäß sind diese Korrekturen sehr klein. Die Abbildung enthält die korrigierten Integranden;

die Flächen sind also einander gleich. Wenn man aber die Flächen der durch die jeweils gleichen  $\Delta v$  begrenzten Ringquerschnitte betrachtet, dann stellt

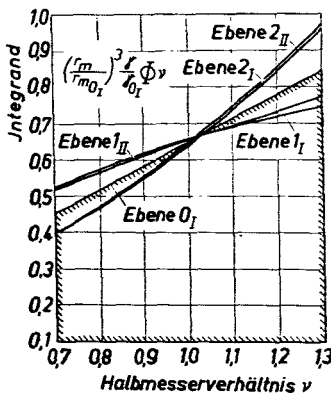


Abb. 8. Massenstromverteilung über der Schaufelhöhe.

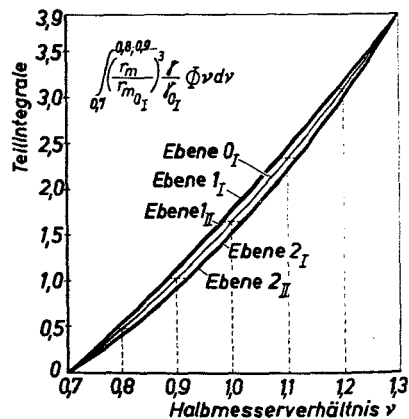


Abb. 9. Zuordnung der Meridianstromlinien über der Schaufelhöhe.

man fest, daß die Durchflußmengen für  $\Delta v$ -Werte unterhalb  $v = 1,0$  in den Ebenen 1 größer und in den Ebenen 2 kleiner sind gegenüber Ebene 0. Umgekehrt ist es für  $\Delta v$ -Bereiche über  $v = 1,0$ . Man erkennt also deutlich die Abdrängung der Strömung im Leitrad nach innen und im Laufrad nach außen.

Trägt man nun, ausgehend

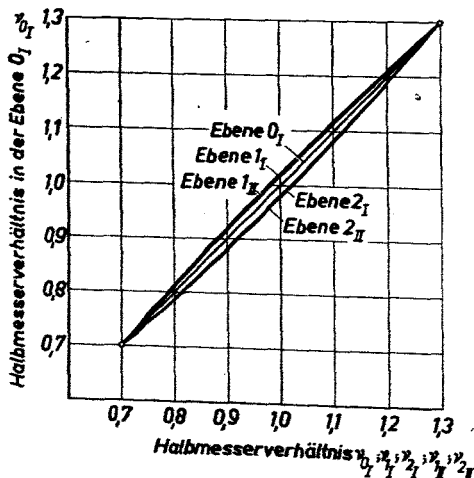


Abb. 10. Auslenkung homologer Punkte (konstanter Massenstrom).

Strömung bei diesem Nabenverhältnis anliegt<sup>6)</sup>, gehen die Linien gemeinsam von  $v_n = 0,7$  aus und enden gemeinsam in  $v_a = 1,3$ . Überträgt man diese

von  $v = 0,7$ , die Teilintegrale jeder einzelnen Ebene über  $v$  auf, dann liefert Abb. 9 die Zuordnung der Halbmesser für jeweils gleichen Durchfluß. Wir haben also keinen linearen Stromlinienverlauf, sonst müßten sämtliche Linien in die Linie für die Ebene  $0_I$  fallen. Entnimmt man dieser Abbildung die Zuordnungen zu der Ebene  $0_I$  für jeweils gleiche Massenströme, wie das gestrichelt eingezeichnet ist, dann erhält man, wie Abb. 10 zeigt, die Auslenkung homologer Punkte in den einzelnen Ebenen zur Ebene  $0_I$ . Für die Ebene  $0_I$  erhält man natürlich eine Gerade. Da die

Ergebnisse in den Längsschnitt der zweistufigen Turbine, dann erhält man den welligen Meridianstromlinienverlauf von Abb. 11; die ursprünglich angenommenen geraden Stromlinien sind mit eingezeichnet.

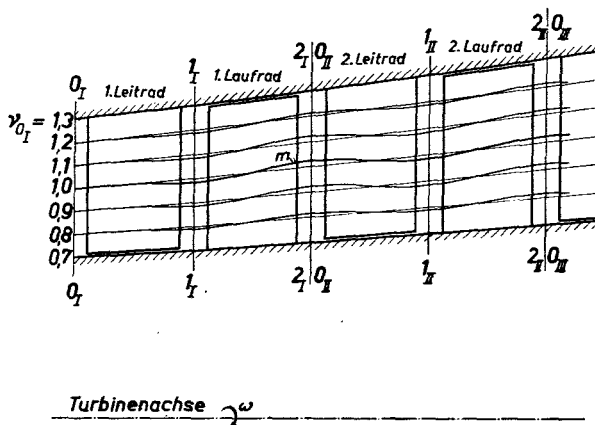


Abb. 11. Strömungskanal mit wirklichem Verlauf der Meridianstromlinien.

Mit der aus der Kontinuität des Durchflusses erzielten Korrektur der mittleren Axialgeschwindigkeit und des Stromlinienverlaufes kann man nun die Druck- und Geschwindigkeitsverhältnisse nachrechnen (3. Näherung). Die mitgeteilten Gleichungen gelten für einen beliebigen Verlauf der Stromlinien. Diese Nachrechnung gestaltet sich insofern etwas umständlicher als bei der nichtlinearen Zuordnung  $\nu_e \neq \nu$  ist. Aus Abb. 10 muß jetzt jeweils der zu einem  $\nu$ -Wert der Ausgangsebene gehörige  $\nu_e$ -Wert abgelesen werden. Damit erhält man aus der Gesamtdruckenergieverteilung in der Eintrittsebene die  $\Pi_{ge}$ - bzw. die  $(\Pi_{ge} - \nu_e \Omega_e)$ -Werte. Trägt man diese über  $\nu$  der Ausgangsebene auf, dann erhält man durch Differentiation die unter den Integralen der Gleichungen (30) und (31) stehenden Ableitungen. Sonst ist die Auswertung der Gleichungen dieselbe wie bisher. Die Erfahrung zeigt, daß diese Nachrechnung nur ganz geringfügige Korrekturen der bisherigen Ergebnisse mit sich bringt.

Von den so gewonnenen Geschwindigkeiten interessieren für den vorliegenden Fall nur die Umfangskomponenten  $\Omega$ . Abb. 12 liefert ihre Verteilung in den einzelnen Ebenen. Sie sind über  $\nu_{0_I}$  aufgetragen, weil von der Ebene  $0_I$  aus auch die *wirklichen* Stromlinien ihren Ausgang nehmen. Die den  $\nu_{0_I}$ -Werten zugeordneten  $\nu$ -Werte der einzelnen Ebenen enthält be-

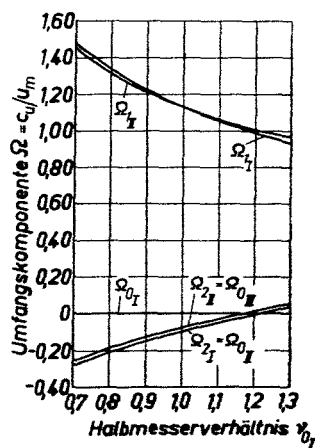


Abb. 12. Verlauf der Umfangskomponente der Absolutgeschwindigkeit über der Schaufelhöhe.

kanntlich Abb. 10. So liegen nun die von den Gleichungen (7) und (8) geforderten Größen längs der wirklichen Stromflächen zur Berechnung der Schaufelzirkulation fest. Die Ergebnisse der Auswertung enthält die Abb. 13. Danach ändert sich die Schaufelzirkulation im Leit- und Laufrad der ersten Stufe über die Schaufelhöhe merklich, während sie bei den Schaufeln der folgenden Stufen praktisch konstant bleibt. Ursächlich für die Nichtkonstanz in der ersten Stufe ist die drallfreie Zuströmung (vgl.  $\Omega_{0I}$  mit  $\Omega_{0II}$  und  $\Omega_{0III}$  von Abb. 12). Erst hinter der ersten Stufe stellt sich bei der mehrstufigen Axialturbine eine Strömungsform ein (vgl. etwa  $\Omega_{0II}$  mit  $\Omega_{0III}$  von Abb. 12), die dann hinter allen weiteren homogenen Stufen wieder auftritt. Das führt zur praktisch konstanten Zirkulation über der Schaufelhöhe bei den Beschauelungen der der ersten Stufe folgenden Räder.

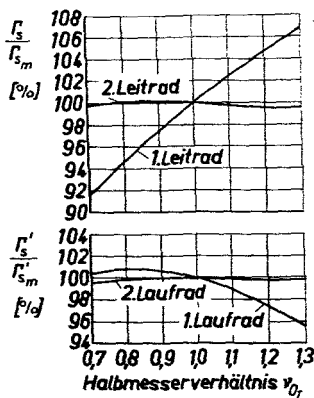


Abb. 13. Verlauf der Schaufelzirkulation über der Schaufelhöhe.

## 5. Zusammenfassung

Es wurde ein Rechenverfahren mitgeteilt, um die kompressible Strömung in mehrstufigen Axialturbinen mit geraden Schaufeln zu berechnen. Im Vordergrund stand dabei die Berechnung der Schaufelzirkulation bei Mehrstufigkeit. Es ergab sich, daß die bei drallverwundenen Schaufeln bekannte Konstanz der Schaufelzirkulation über die Schaufelhöhe in guter Näherung auch bei mehrstufigen Turbinen mit geraden Schaufeln, ausgenommen der Schaufeln der ersten Stufe, erreicht wird.

## 6. Schrifttum

- <sup>1)</sup> K. Bammert und H. Kläukens: Nabentotwasser hinter Leiträdern von axialen Strömungsmaschinen. Ing.-Archiv, XVII. Band (1949), S. 367/390.
- <sup>2)</sup> H. Föttinger: Neue Grundlagen für die theoretische und experimentelle Behandlung des Propellerproblems. Jahrb. d. Schiffbautechn. Ges. 19. Band (1918) S. 385/472.
- <sup>3)</sup> W. Traupel: Kompressible Strömung durch Turbinen. Schweizer Archiv 16. Jahrgang (1950), S. 129/138 u. 176/186.
- <sup>4)</sup> E. Eckert und G. Korbacher: Die Strömung durch Axialturbinstufen von großer Schaufelhöhe. Forsch.-Ber. 1750 dtsh. Luftf.-Forsch. (1943).
- <sup>5)</sup> W. Spannhake: Kreiselräder als Pumpen und Turbinen. Verlag Springer, Berlin (1931), S. 102.
- <sup>6)</sup> K. Bammert: Die Kernabmessungen in kreisenden Strömungen. Z VDI Bd. 92 (1950), S. 777/784.